Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

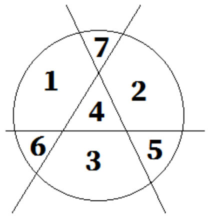
Задачи для 5 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Три прямые делят круг на 7 частей. Можно ли распределить числа от 1 до 7 по одному в каждой области так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой прямой, были равны?

Решение. Да, например, так:



2. Марине для участия в олимпиаде нужно купить тетрадку, ручку, линейку, карандаш и ластик. Если она купит тетрадку, карандаш и ластик, то потратит 47 тугриков. Если купит тетрадку, линейку и ручку, то потратит 58 тугриков. Сколько ей понадобится денег на весь набор, если тетрадь стоит 15 тугриков?

Решение. Если Марина купит два набора из условия, то потратит $47+58 = 105$ тугриков, но купит лишнюю тетрадь, поэтому полный комплект школьных принадлежностей стоит $105 - 15 = 90$ тугриков.

Критерии. Только ответ без объяснения — 1 балл. Если в решении подбирают стоимость ручки и карандаша (хотя в условии не сказано, что стоимость обязательно целая) — 0 баллов.

3. На исследовательском космическом корабле произошла авария в реакторе, и из него утекают ядовитые вещества. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями, однако времени на закрытие отдельных дверей уже нет. Тем не менее, капитан может успеть отдать команду «Закрыть N дверей», после которой искусственный интеллект корабля закроет случайные N дверей. Чему равно наименьшее N, чтобы вся команда гарантированно смогла спастись в гостиной?

Решение. Всего на космическом корабле 23 коридора. Если закрыть не более 21 двери, то могут остаться открытыми коридоры между реактором и правым двигателем и правым двигателем и гостиной, то есть команда будет в опасности. Поэтому необходимо закрыть хотя бы 22 двери.

Критерии. Верный ответ без обоснования — 0 баллов. Ошибка в подсчете числа коридоров — 4 балла.

4. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста встали в круг, после чего каждый сказал: «Я выше ученика, стоящего напротив меня!» Сколько рыцарей учится в школе?

Решение. В каждой паре один из двух учеников действительно выше своего соседа напротив, поэтому говорит правду и является рыцарем. Итого N рыцарей.

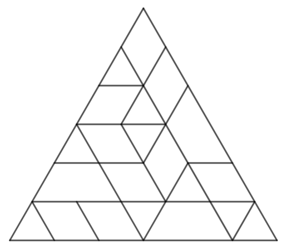
Критерии. Если никак не обоснован факт того, что в паре точно будет один рыцарь — 1 балл. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов.

5. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 5?

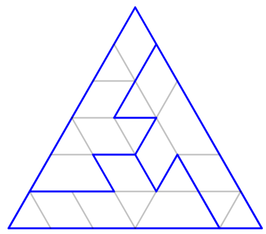
Решение. Число должно делиться на 5, поэтому буква «А» равна 0 или 5. Если она равна 0, то для остальных букв («Г», «В», «Т», «Е», «М», «Л») есть $A_9^6 = 9!/3!$ вариантов; если же «А» равна 5, то для остальных букв есть $8 \cdot A_8^5 = 8!/3!$ вариантов, так как «Г» не может равняться нулю. Всего $9!/6 + 8 \cdot 8!/6 = 114240$ способов.

Критерии. Явно указано, что для буквы «А» 2 варианта: 5 или 0 — 2 балла. Если далее разбираются 2 варианта, то ещё 5 баллов. В качестве ответа приведено выражение, не досчитанное до конца — не снижать.

6. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



Решение.



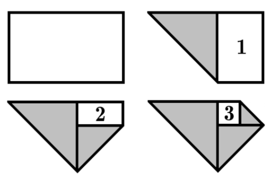
Критерии. Есть пример — 7 баллов. «Творческий поиск» без примера не оценивается.

7. Три автомобиля A, B и C стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все три машины встретятся в первый раз?

Решение. A и C встречаются раз в 7 минут, а A и B — раз в 53 минуты. Значит, все вместе они встретятся в такое время, которое кратно и 7, и 53, то есть через $7 \cdot 53 = 371$ минут.

Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — 3 балла. Решено через подбор длин и скоростей — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

8. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите периметр исходного листа.



Решение. Из рисунка видно, что при загибании периметр прямоугольника уменьшается на удвоенную короткую сторону, поэтому короткая сторона прямоугольника-1 равна $20/2 = 10$, короткая сторона прямоугольника-2 равна $16/2 = 8$. Отсюда длинная сторона прямоугольника-1 равна 18, а длинная сторона исходного листа — 28. Тогда периметр: $(28 + 18) \cdot 2 = 92$.

Критерии. Ответ без обоснования или найденный подбором — 0 баллов.

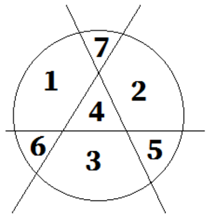
Задачи для 6 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Три прямые делят круг на 7 частей. Можно ли распределить семь последовательных натуральных чисел по одному в каждой области так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой прямой, были равны?

   Решение. Да, например, так:



2. Марине для участия в олимпиаде нужно купить тетрадку, ручку, линейку и карандаш. Если она купит тетрадку, карандаш и линейку, то потратит 47 тугриков. Если купит тетрадку, линейку и ручку, то потратит 58 тугриков. Если же купит только ручку с карандашом, потратит 15 тугриков. Сколько ей понадобится денег на весь набор?

   Решение. Если Марина купит сразу все три набора из условия, то потратит $47 + 58 + 15 = 120$ тугриков, при этом каждый элемент купит два раза, поэтому полный комплект школьных принадлежностей стоит $120/2 = 60$ тугриков.

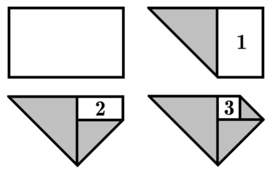
   Критерии. Только ответ без объяснения — 1 балл. Если в решении подбирают стоимость ручки и карандаша (хотя в условии не сказано, что стоимость обязательно целая) — 0 баллов.

3. Исследовательский космический корабль входит в пояс астероидов, которые могут повредить корпус корабля, что приведет к разгерметизации. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями. У капитана есть дроид-помощник, который может закрывать (но не открывать обратно) двери в тех коридорах, где он проезжает. Сможет ли дроид закрыть все двери на корабле?

   Решение. Всего на космическом корабле 23 коридора и 14 отсеков. Каждое посещение дроидом одного отсека перекрывает два коридора: через который он попал в помещение и через который покинул его. Поэтому во всех помещениях, кроме, может быть, двух, должно быть четное число выходов (два помещения могут служить начальной и конечной точкой маршрута, и тогда в них может быть нечетное количество выходов). Однако на космическом корабле есть 6 таких помещений (гостиная, хранилище, мед. отсек, двигатели и реактор), поэтому дроид не сможет закрыть все двери.

   Критерии. Если в решении упоминается, что дроид идёт по эйлеровому пути или что в его пути может быть только 2 комнаты, в которых нечётное число дверей — 3 балла. Рассуждения на примерах — 0 баллов.

4. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите периметр исходного листа.



Решение. Из рисунка видно, что при загибании периметр прямоугольника уменьшается на удвоенную короткую сторону, поэтому короткая сторона прямоугольника-1 равна $20/2 = 10$, короткая сторона прямоугольника-2 равна $16/2 = 8$. Отсюда длинная сторона прямоугольника-1 равна 18, а длинная сторона исходного листа — 28. Тогда периметр: $(28 + 18) \cdot 2 = 92$.

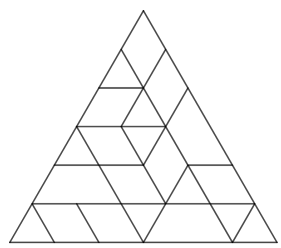
Критерии. Ответ без обоснования или найденный подбором — 0 баллов.

5. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 25?

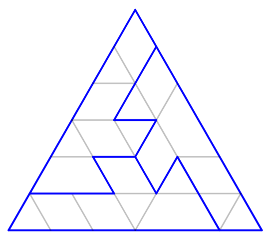
Решение. Число должно делиться на 25, поэтому «ЛА» равно 25, 50 или 75 (00 быть не может, так как буквы разные). Если «ЛА» равно 50, то для остальных букв («Г», «В», «Т», «Е», «М») есть A_8^5 вариантов; иначе для остальных букв есть $7 \cdot A_7^4$ вариантов. Всего $8!/6 + 2 \cdot 7 \cdot 7!/6 = 18480$ способов.

Критерии. Явно указано, что для букв «ЛА» не подходит вариант 00, и продемонстрированы все 3 случая — 3 балла. Если далее разбираются 2 варианта без ошибок, то ещё 4 балла. В качестве ответа приведено выражение, не досчитанное до конца — не снижать.

6. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



Решение.



Критерии. Есть пример — 7 баллов. «Творческий поиск» без примера не оценивается.

7. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

Решение. А) В каждой паре не более одного рыцаря, поэтому рыцарей не более N (пример достигается расстановкой N более высоких учеников в шахматном порядке).
Б) Если окажется, что все ученики одного роста, то все врут.

Критерии. Правильно сделан пункт а) — 5 баллов. Приведена только оценка — 2 балла, только пример — 2 балла. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов. Выполнен пункт б) — 2 балла.

8. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

Решение. Раз A с C и B с D встречаются раз в 7 минут, то их скорости сближения равны: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Иными словами, равны скорости удаления A, B и C, D: $V_A - V_B = V_D - V_C$. Значит, раз A и B встречаются в первый раз на 53-й минуте, то и C с D в первый раз встретятся на 53-й минуте.

Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

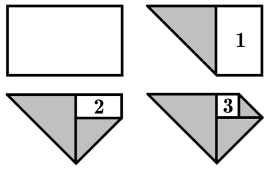
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 7 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

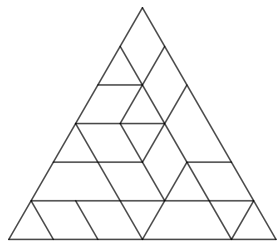
1. Есть прямоугольный лист, белый с одной стороны и серый с другой. Его согнули так, как показано на картинке. Периметр первого прямоугольника на 20 больше периметра второго прямоугольника. А периметр второго прямоугольника на 16 больше периметра третьего прямоугольника. Найдите площадь исходного листа.



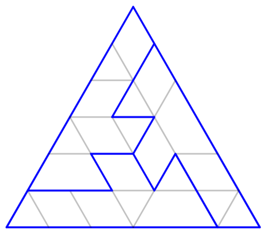
Решение. Из рисунка видно, что при загибании периметр прямоугольника уменьшается на удвоенную короткую сторону, поэтому короткая сторона прямоугольника-1 равна $20/2 = 10$, короткая сторона прямоугольника-2 равна $16/2 = 8$. Отсюда длинная сторона прямоугольника-1 равна 18, а длинная сторона исходного листа — 28. Тогда площадь: $28 \cdot 18 = 504$.

Критерии. В ответе дан периметр вместо площади — 3 балла. Подбор длин в любом проявлении (или просто заявлены длины сторон пронумерованных прямоугольников без обоснования) — 0 баллов.

2. Разрежьте данный треугольник по отмеченным линиям на три равные части (то есть совпадающие и по форме, и по размеру).



Решение.



Критерии. Есть пример — 7 баллов. «Творческий поиск» без примера не оценивается.

3. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 8?

Решение. Чтобы число делилось на 8, «АЛА» должно делиться на 8, при этом «А» — четная цифра. «АЛА» $= 101 \cdot$ «А» $+ 10 \cdot$ «Л» $= (100 \cdot$ «А» $+ 8 \cdot$ «Л»$) +$ «А» $+ 2 \cdot$ «Л», где записанное в скобках выражение заведомо делится на 8, поэтому достаточно потребовать, чтобы («А» $+ 2 \cdot$ «Л»)$\,\vdots\,8$. Перебором находим 11 вариантов: (0,4), (0,8), (2,3), (2,7), (4,2), (4,6), (6,1), (6,5), (6,9), (8,0), (8,4). В трех из них, где есть ноль, для оставшихся пяти букв («Г», «В», «Т», «Е», «М») остается $A_8^5 = 8!/3!$ вариантов; в остальных восьми — $7 \cdot A_7^4 = 7 \cdot 7!/3!$. Итого: $3 \cdot 8!/3! + 8 \cdot 7 \cdot 7!/3! = 67200$.

Критерии. Сформулирован признак делимости на 8 и явно обозначено, что «А» — четная цифра — 1 балл. Доказано, что «А» + 2«Л» или 5«А» + 10«Л» делится на 8 — 3 балла. За каждый потерянный случай вариантов для букв «А» и «Л» отнимается 1 балл. Если случаи с 0 обсчитаны так же, как и случаи без 0, отнимается 2 балла.

4. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все машины встретятся в первый раз?

Решение. A и C встречаются раз в 7 минут, а A и B — раз в 53 минуты. Значит, все вместе они встретятся в такое время, которое кратно и 7, и 53, то есть через $7 \cdot 53 = 371$ минут. При этом B и D тоже встречаются каждые 7 минут, поэтому на 371-й минуте машина D будет в той же точке, что и остальные три машины.

Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

5. В ряд выписаны квадраты первых 2022 натуральных чисел: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. Для каждого выписанного числа, кроме первого и последнего, посчитали среднее арифметическое его левого и правого соседей и записали под ним (например, под числом 4 написали $\frac{1+9}{2} = 5$). Для получившейся строки из 2020 чисел сделали то же самое. Так продолжали, пока не дошли до строки, в которой всего два числа. Чему они равны?

Решение. Посмотрим на произвольное число строки x^2. Под ним окажется написано

$$\frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{2} = \frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1}{2} = \frac{2x^2 + 2}{2} = x^2 + 1.$$

Таким образом, каждый раз число увеличивается на единицу. Изначально чисел 2022, и каждый раз их становится на 2 меньше, поэтому операцию проделают 1010 раз, и останутся два центральных числа, увеличенных на 1010: $1011^2 + 1010 = 1023131$ и $1012^2 + 1010 = 1025154$.

Критерии. Доказано в общем виде, что при каждой операции число увеличивается на 1 — 3 балла. Решено верно без грамотного доказательства увеличения на 1 — 4 балла. Ошибка в подсчете остающихся чисел — -2 балла.

6. На исследовательском космическом корабле произошла авария в реакторе, и из него утекают ядовитые вещества. Все коридоры между помещениями оборудованы герметичными дверями, однако времени на закрытие отдельных дверей уже нет. Тем не менее, капитан может успеть отдать команду «Закрыть N дверей», после которой искусственный интеллект корабля закроет случайные N дверей. Чему равно наименьшее N, чтобы гарантированно хотя бы один из отсеков корабля остался пригодным для жизни?

Решение. Всего на космическом корабле 23 коридора и 14 отсеков. Воспользуемся теорией графов: пусть отсеки — вершины, а коридоры — ребра. Тогда, чтобы такой граф оставался связным (т.е. чтобы между любыми двумя вершинами был путь) с минимальным количеством ребер, он должен быть деревом, а тогда в нем должно быть хотя бы $14 - 1 = 13$ ребер. Иными словами, если закрыть не более $23 - 13 = 10$ дверей, то может остаться открытым сквозной проход между всеми отсеками (см. рис.), то есть команда будет в опасности. Если же в графе останется менее 13 ребер, то он автоматически станет несвязным. Поэтому необходимо закрыть хотя бы $10 + 1 = 11$ дверей и укрыться в тех отсеках, которые будут полностью отрезаны от реактора.

Критерии. Показано, что менее 11 дверей не хватит (например, приведен пример на 10 дверей и показано, что останется проход между всеми отсеками) — 3 балла. Доказано, что 11 закрытых дверей достаточно — 3 балла. Ошибка в подсчетах количества отсеков и/или коридоров — -2 балла.

7. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Существуют ли два последовательных трёхзначных полезных числа?

Решение. Да, например 578 и 579; 875 и 876.

Критерии. Правильный ответ без проверки — 5 баллов.

8. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

Решение. А) В каждой паре не более одного рыцаря, поэтому рыцарей не более N (пример достигается расстановкой N более высоких учеников в шахматном порядке).
Б) Так как все ученики разного роста, самый высокий из них заведомо выше своих соседей, поэтому является рыцарем, то есть все лжецами быть не могут.

Критерии. Правильно сделан пункт а) — 5 баллов. Приведена только оценка — 2 балла, только пример — 2 балла. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов. Выполнен пункт б) — 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

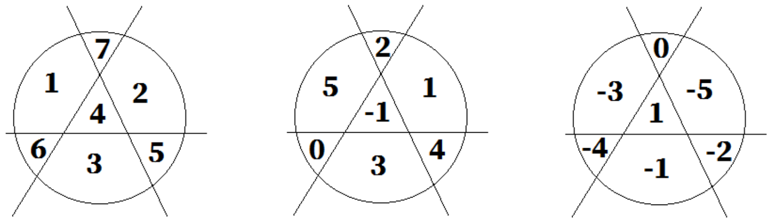
Задачи для 8 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и хочет написать в них 7 последовательных целых чисел (в каждой по числу) так, чтобы суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Придумайте для него три примера, различающихся наборами использованных чисел.

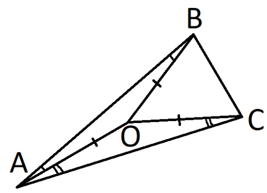
   Решение. Вот три возможных примера (есть и другие):



2. *Разламыванием* остроугольного треугольника ABC будем называть операцию, когда внутри него ставят такую точку O, что $OA = OB = OC$, и разрезают его на треугольники OAB, OAC, OBC. Петя взял треугольник с углами 3°, 88° и 89° и *разломал* его на три треугольника. Потом выбрал один из кусков (тоже остроугольный) и *разломал* его. Так он продолжал до тех пор, пока все треугольники не оказались тупоугольными. Сколько всего треугольников у него получилось?

   Решение.

   Рассмотрим разламывание остроугольного треугольника ABC. Точка O — центр описанной окружности — лежит внутри треугольника, а треугольники AOB, AOC, BOC равнобедренные. Если $\angle BAO = \alpha, \angle CAO = \beta$, то $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha, \angle AOC = 180^\circ - 2\beta$, откуда $BOC = 2\alpha + 2\beta = 2\angle BAC$. Заметим, что для исходного треугольника (с углами $\angle A = 3^\circ, \angle B = 88^\circ, \angle C = 89^\circ$) остроугольным будет только треугольник BOC (при этом он равнобедренный, $\angle BOC = 6^\circ$).



   Далее, если в нём отметить точку O_2, то остроугольным будет треугольник O_2BC ($\angle O_2 = 12^\circ$), а два других — равные и тупоугольные. Далее аналогично будет $\angle O_3 = 24^\circ$, $\angle O_4 = 48^\circ$, $\angle O_5 = 96^\circ$. В этот момент все три новых треугольника окажутся тупоугольными, и процесс прервётся. Таким образом, произошло 5 разламываний. При каждом из них количество треугольников увеличивается на 2, поэтому всего получается 11 треугольников.

3. Натуральное число $n > 5$ называется *новым*, если существует число, не кратное n, но кратное всем натуральным числам, меньшим n. Какое наибольшее количество подряд идущих чисел могут быть новыми?

   Решение. Ответ: 3.

   Пример: число 7 новое (60 кратно числам от 1 до 6, но не кратно 7);
   число 8 новое (420 кратно числам от 1 до 7, но не кратно 8);
   число 9 новое (840 кратно числам от 1 до 8, но не кратно 9).

Оценка: каждое четвёртое число имеет вид $n = 4k + 2 = 2(2k+1)$; если какое-то число кратно 2 и $2k+1$, то оно кратно и $2(2k+1)$, поэтому такое n не может быть новым.

4. Среднее арифметическое нескольких натуральных чисел равно 20,22. Докажите, что среди этих чисел найдутся два равных.

Решение. Поскольку 20,22 равно несократимой дроби со знаменателем 50, то количество чисел делится на 50. Однако если все эти $50n$ чисел различны, то их среднее арифметтическое не меньше $25{,}5n$, то есть больше 25.

5. В ряд выписаны квадраты первых 2022 натуральных чисел: $1, 4, 9, \ldots, 4088484$. Для каждого выписанного числа, кроме первого и последнего, посчитали среднее арифметическое его левого и правого соседей и записали под ним (например, под числом 4 написали $\frac{1+9}{2} = 5$). Для получившейся строки из 2020 чисел сделали то же самое. Так продолжали, пока не дошли до строки, в которой всего два числа. Чему они равны?

Решение. Посмотрим на произвольное число строки x^2. Под ним окажется написано

$$\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{2} = \frac{x^2-2x+1+x^2+2x+1}{2} = \frac{2x^2+2}{2} = x^2+1.$$

Таким образом, каждый раз число увеличивается на единицу. Изначально чисел 2022, и каждый раз их становится на 2 меньше, поэтому операцию проделают 1010 раз, и останутся два центральных числа, увеличенных на 1010: $1011^2 + 1010 = 1023131$ и $1012^2 + 1010 = 1025154$.

Критерии. Доказано в общем виде, что при каждой операции число увеличивается на 1 — 3 балла. Решено верно без грамотного доказательства увеличения на 1 — 4 балла. Ошибка в подсчете остающихся чисел — -2 балла.

6. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

Решение. Раз A с C и B с D встречаются раз в 7 минут, то их скорости сближения равны: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Иными словами, равны скорости удаления A, B и C, D: $V_A - V_B = V_D - V_C$. Значит, раз A и B встречаются в первый раз на 53-й минуте, то и C с D в первый раз встретятся на 53-й минуте.

Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

7. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда врут, открыли школу. Все $2N$ учеников разного роста построились в колонну по двое (то есть в два столбца). Двое человек, стоящих первыми, сказали: «Я выше двоих: своего соседа в паре и человека за мной». Последние двое сказали: «Я тоже выше двоих: своего соседа в паре и человека передо мной». Наконец, все остальные сказали: «А я выше троих: своего соседа в паре, человека передо мной и человека за мной».
а) Какое максимальное количество рыцарей учится в школе?
б) Могут ли в школе учиться только лжецы?

Решение. А) В каждой паре не более одного рыцаря, поэтому рыцарей не более N (пример достигается расстановкой N более высоких учеников в шахматном порядке).

Б) Так как все ученики разного роста, самый высокий из них заведомо выше своих соседей, поэтому является рыцарем, то есть все лжецами быть не могут.

Критерии. Правильно сделан пункт а) — 5 баллов. Приведена только оценка — 2 балла, только пример — 2 балла. В качестве обоснования разбирается конкретный пример — 0 баллов. Выполнен пункт б) — 2 балла.

8. Егор написал на доске число и зашифровал его по правилам буквенных ребусов (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым буквам — одинаковые цифры). Получилось слово «ГВАТЕМАЛА». Сколько различных чисел Егор мог изначально написать, если его число делилось на 30?

 Решение. Буква А должна равняться 0. Остальные 6 букв — ненулевые цифры с суммой, кратной 3. Заметим, что каждый остаток от деления на 3 встречается трижды. Перебором находим все наборы остатков, сумма которых кратна трём: 000111, 000222, 111222, 001122. Считаем 6-элементные подмножества цифр: первых трёх типов — по одному, последнего — $3^3 = 27$. Каждое из них можно переставлять $6!$ способами. Итого: $30 \cdot 6! = 21600$.

 Критерии. Показано, что «А» равно 0 — 1 балл. Комбинации остальных букв найдены перебором — не снижать, но если потеряны случаи — не более 3 баллов. Ошибка в вычислениях — -1 балл. В качестве ответа приведено выражение, не досчитанное до конца — так же -1 балл.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 9 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

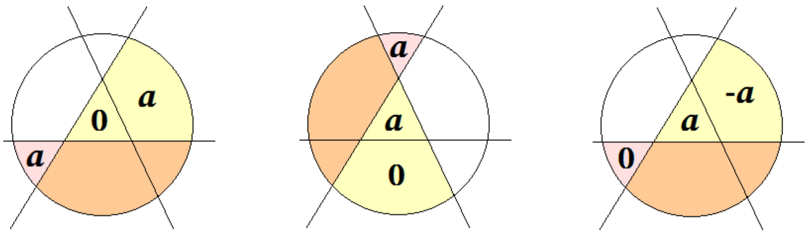
---

1. Есть ли в XXI веке такой год, номер которого можно представить в виде $\dfrac{a+b\cdot c\cdot d\cdot e}{f+g\cdot h\cdot i\cdot j}$, где $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ — попарно различные цифры?

   Решение. Да, например, $2022 = \dfrac{6+4\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1+0\cdot 2\cdot 3\cdot 5}$. Аналогично можно представить 2018, 2020 и 2021.

2. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и написал в них 7 различных целых чисел так, что суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Одно из чисел равно нулю. Докажите, что какое-то число отрицательно.

   Решение. Разберём три случая расположения нуля (по картинке на каждый случай). На картинках сумма жёлтых секторов равна сумме розовых (поскольку жёлтые + оранжевые = розовые + оранжевые = полусумма всех чисел). Видим, что первые два случая вообще невозможны (есть совпадающие числа), а в третьем случае одно из чисел a и $-a$ отрицательно.



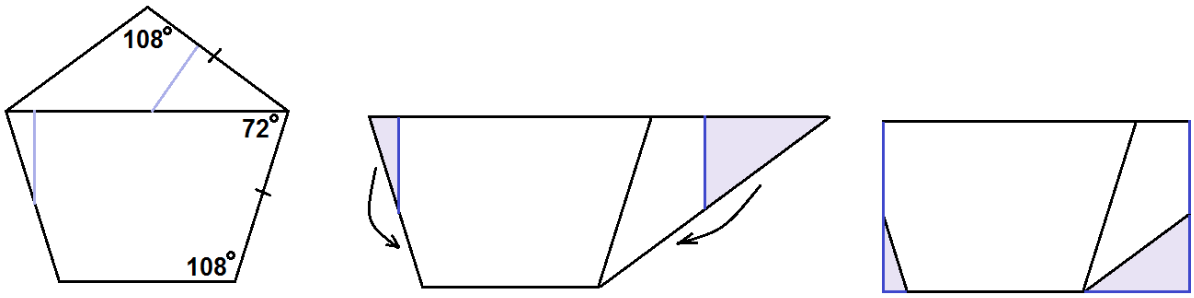
   Критерии. Если разобраны не все случаи, то даётся не больше 2 баллов.

3. В сельском клубе проводится чемпионат по шахматам: каждый участник должен сыграть с каждым по одной партии. В клубе только одна доска, поэтому две партии не могут проходить одновременно. По регламенту чемпионата, в любой момент число партий, уже сыгранных разными участниками, должно различаться не более чем на 1. Первые несколько партий чемпионата прошли с соблюдением регламента. Всегда ли можно завершить чемпионат, соблюдая регламент?

   Решение. Не всегда. Например, пусть в чемпионате 6 игроков, и первые партии проводились в таком порядке: 12, 34, 56, 13, 24. Теперь наименьшее число партий сыграли 5 и 6, поэтому надо бы провести матч между ними, но он уже состоялся.

4. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.

   Решение. Отрезав и переложив треугольник, можно получить трапецию (это следует из отмеченных углов и равенства сторон). Далее, отрезав от трапеции два прямоугольных треугольника, повернём их и получим прямоугольник (см. рисунок).



5. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки в первый раз встретятся C и D?

   Решение. Раз A с C и B с D встречаются раз в 7 минут, то их скорости сближения равны: $V_A + V_C = V_B + V_D$. Иными словами, равны скорости удаления A, B и C, D: $V_A - V_B = V_D - V_C$. Значит, раз A и B встречаются в первый раз на 53-й минуте, то и C с D в первый раз встретятся на 53-й минуте.

   Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

6. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?

   Решение. Перепишем уравнение в виде $(1+1/a)(1+1/b)(1+1/c) = 2$. В силу симметрии достаточно найти все решения с $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда $(1+1/a)^3 \geqslant 2$, то есть $a \leqslant (\sqrt[3]{2}-1)^{-1} < 4$ и $a \in \{1, 2, 3\}$. В случае $a = 1$ выполнено неравенство $2(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть решений нет. Если $a = 2$, то $\frac{3}{2}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $2 \leqslant b \leqslant (\frac{2\sqrt{3}}{3}-1)^{-1} < 7$. В этом случае имеется 3 решения $(a, b, c) = (2, 4, 15), (2, 5, 9), (2, 6, 7)$ (при $b = 2$ и $b = 3$ уравнение на c не имеет решений в натуральных числах). Наконец, если $a = 3$, то $\frac{4}{3}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $3 \leqslant b \leqslant (\sqrt{\frac{3}{2}}-1)^{-1} < 5$. Это даёт ещё 2 решения $(a, b, c) = (3, 3, 8), (3, 4, 5)$. С учётом перестановок всего имеется 27 решений.

   Критерии. Если найдена только часть решений, то даётся не больше 2 баллов.

7. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Найдите два наибольших последовательных (то есть различающихся на 1) полезных числа.

   Решение. Числа 9875213 и 9875214 полезны. Докажем, что бо́льших последовательных полезных чисел не существует. У последовательных чисел и суммы цифр последовательны (иначе имеем переход через разряд, то есть 0 на конце). Но тогда максимальные возможные суммы цифр — 35 и 36 (среди любых двух бо́льших сумм хотя бы одна имеет простой делитель, больший 9, или превосходит $1+\ldots+9 = 45$). Последовательные полезные числа не более чем семизначные, иначе суммы их цифр будут не меньше $1+\ldots+8 = 36$ у каждого. Последовательных полезных чисел вида $9876***$ не бывает, так как у таких чисел суммы цифр не меньше $9+8+7+6+1+2+3 = 36$. А последовательные полезные числа вида $9875***$ могут отличаться от найденных только перестановкой последних цифр (иначе суммы их цифр больше 36), так что найденные числа действительно наибольшие.

   Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

8. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).

а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?

б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?

Решение. а) 4. Разобьём парк на 4 четверти (квадрата 5×5), тогда в каждой четверти должен быть хотя бы один фонарь (для освещения, например, угловых клеток). Ставя по фонарю в центре каждой четверти, получаем пример.

б) 10.

Оценка. В каждом угловом квадрате 3×3 должно быть хотя бы два фонаря (для освещения угловой клетки). Временно оставим только эти 8 фонарей. Каждый из них освещает только в пределах своей четверти, причём если сломается фонарь в центре четверти (или если он там отсутствует), то какая-то пятиклеточная полоска внутри этой четверти, граничащая с другой четвертью, точно не будет освещена. Заметим, что объединение двух таких полосок для противоположных четвертей в любом случае нельзя осветить одним фонарём, поэтому понадобятся ещё хотя бы два фонаря.

Пример:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Критерии. В пункте а) за оценку и пример даётся по 1 баллу. В пункте б) за оценку даётся 3 балла (из них 1 балл, если доказано, что 8 фонарей недостаточно), а за пример — 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

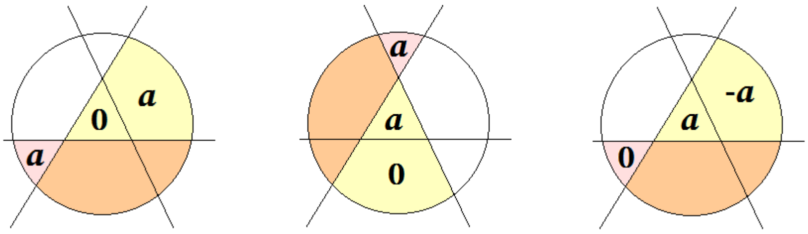
Задачи для 10 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Петя разделил круг тремя прямыми на 7 частей и написал в них 7 различных целых чисел так, что суммы чисел, стоящих по одну и по другую сторону от каждой из прямых, были одинаковы. Одно из чисел равно нулю. Докажите, что какое-то число отрицательно.

Решение. Разберём три случая расположения нуля (по картинке на каждый случай). На картинках сумма жёлтых секторов равна сумме розовых (поскольку жёлтые + оранжевые = розовые + оранжевые = полусумма всех чисел). Видим, что первые два случая вообще невозможны (есть совпадающие числа), а в третьем случае одно из чисел a и $-a$ отрицательно.



Критерии. Если разобраны не все случаи, то даётся не больше 2 баллов.

2. В сельском клубе проводится чемпионат по шахматам: каждый участник должен сыграть с каждым по одной партии. В клубе только одна доска, поэтому две партии не могут проходить одновременно. По регламенту чемпионата, в любой момент число партий, уже сыгранных разными участниками, должно различаться не более чем на 1. Докажите, что при любом числе участников можно провести чемпионат с соблюдением регламента.

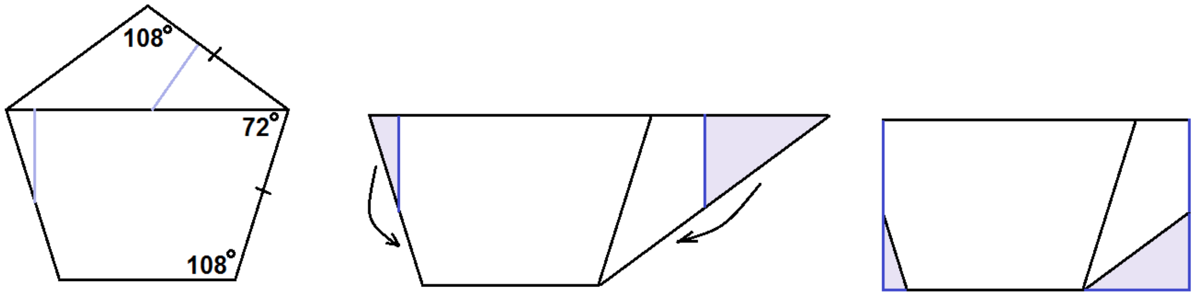
Решение. а) Рассмотрим случай с чётным числом игроков n. Разобьём чемпионат на отдельные круги, так что в круге номер i играют участники, сумма номеров которых сравнима с i по модулю n. Тогда в каждом круге каждый игрок играет ровно один раз, и по окончании круга все сыграли поровну.

б) Пусть игроков нечётное количество.
1. Проведём все матчи с суммой номеров 2 по модулю n (игрок 1 отдыхает). Проведём матч $1n$. Проведём все матчи с суммой номеров n по модулю n (игрок n отдыхает). По итогам этого «двойного круга» все сыграли по два матча и в процессе всё было по регламенту.
2. Проделаем то же, заменив игроков 1 и n на 2 и $n-1$, а суммы — на $2 \cdot 2$ и $2(n-1)$. Действуем так и далее. В итоге в k-м круге проходят все матчи с суммой модулей $2k$ и $2(n+1-k)$, а также очередной матч с суммой модулей 1 (которая не получается таким способом), k меняется от 1 до $(n-1)/2$.

Критерии. Случай чётного n оценивается в 3 балла, случай нечётного n — в 4 балла. Если приведена только идея разбиения участников на пары, то даётся 1 балл.

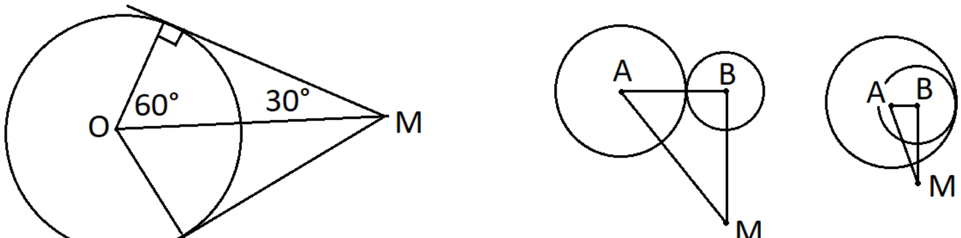
3. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.

Решение. Отрезав и переложив треугольник, можно получить трапецию (это следует из отмеченных углов и равенства сторон). Далее, отрезав от трапеции два прямоугольных треугольника, повернём их и получим прямоугольник (см. рисунок).



4. Будем называть точку *удобной* для окружности, если угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности, равен 60°. Две окружности с центрами A и B касаются друг друга, а точка M является удобной для каждой из них. Найдите отношение радиусов окружностей, если $\triangle ABM$ прямоугольный.

   Решение. Заметим (см. рис. 1), что точка M удобна для окружности с центром O тогда и только тогда, когда OM вдвое больше радиуса.



1 2a 2b

   Не умаляя общности, пусть окружности имеют радиусы $r_A \geqslant r_B$. Так как они касаются, то $AB = r_A \pm r_B$ (плюс при внешнем касании и минус при внутреннем, см. рис. 2). С другой стороны, $AM = 2r_A$ и $BM = 2r_B$, потому что M удобная для обеих окружностей. В треугольнике AMB сторона AM является гипотенузой, так как $2r_A \geqslant 2r_B$ и $2r_A \geqslant r_A \pm r_B$. Получаем уравнение

$$4r_A^2 = 4r_B^2 + r_A^2 \pm 2r_A r_B + r_B^2,$$

   то есть $3r_A^2 = 5r_B^2 \pm 2r_A r_B$. Если касание внутреннее, то $r_A = r_B$, но тогда $A = B$ и AMB не будет треугольником. Если же касание внешнее, то $r_A = \frac{5}{3} r_B$. Следовательно, отношение радиусов равно $3 : 5$.

   Критерии. Если не учитывается, что окружности могут касаться внутренним образом, то снимается 2 балла.

5. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $(a+1)(b+1)(c+1) = 2abc$?

   Решение. Перепишем уравнение в виде $(1+1/a)(1+1/b)(1+1/c) = 2$. В силу симметрии достаточно найти все решения с $a \leqslant b \leqslant c$. Тогда $(1+1/a)^3 \geqslant 2$, то есть $a \leqslant (\sqrt[3]{2}-1)^{-1} < 4$ и $a \in \{1,2,3\}$. В случае $a = 1$ выполнено неравенство $2(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть решений нет. Если $a = 2$, то $\frac{3}{2}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $2 \leqslant b \leqslant (\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1)^{-1} < 7$. В этом случае имеется 3 решения $(a,b,c) = (2,4,15), (2,5,9), (2,6,7)$ (при $b = 2$ и $b = 3$ уравнение на c не имеет решений в натуральных числах). Наконец, если $a = 3$, то $\frac{4}{3}(1+1/b)^2 \geqslant 2$, то есть $3 \leqslant b \leqslant (\sqrt{\frac{3}{2}} - 1)^{-1} < 5$. Это даёт ещё 2 решения $(a,b,c) = (3,3,8), (3,4,5)$. С учётом перестановок всего имеется 27 решений.

   Критерии. Если найдена только часть решений, то даётся не больше 2 баллов.

6. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?

Решение. а) 4. Разобьём парк на 4 четверти (квадрата 5×5), тогда в каждой четверти должен быть хотя бы один фонарь (для освещения, например, угловых клеток). Ставя по фонарю в центре каждой четверти, получаем пример.
б) 10.
Оценка. В каждом угловом квадрате 3×3 должно быть хотя бы два фонаря (для освещения угловой клетки). Временно оставим только эти 8 фонарей. Каждый из них освещает только в пределах своей четверти, причём если сломается фонарь в центре четверти (или если он там отсутствует), то какая-то пятиклеточная полоска внутри этой четверти, граничащая с другой четвертью, точно не будет освещена. Заметим, что объединение двух таких полосок для противоположных четвертей в любом случае нельзя осветить одним фонарём, поэтому понадобятся ещё хотя бы два фонаря.

Пример:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Критерии. В пункте а) за оценку и пример даётся по 1 баллу. В пункте б) за оценку даётся 3 балла (из них 1 балл, если доказано, что 8 фонарей недостаточно), а за пример — 2 балла.

7. $f(x)$ — линейная функция, причём уравнение $f(f(x)) = x + 1$ не имеет решений. Найдите все возможные значения величины $f(f(f(f(f(2022))))) - f(f(f(2022))) - f(f(2022))$.

Решение. Пусть $f(x) = kx + b$, тогда $f(f(x)) = k(kx + b) + b = k^2x + kb + b$. Уравнение может не иметь решений только при $k^2 = 1$, то есть для функций $x + b$ или $-x + b$, поэтому в ответе получается либо $(2022 + 5b) - (2022 + 3b) - (2022 + 2b) = -2022$, либо
$(-2022 + b) - (-2022 + b) - 2022 = -2022$.

Ответ: -2022.

Критерии. За пробелы в доказательстве того, что $k = \pm 1$, снимается не больше 2 баллов.

8. Назовём *эффективностью* натурального числа n долю всех натуральных чисел от 1 до n включительно, имеющих с n общий делитель, больший 1. Например, эффективность числа 6 равна $\frac{2}{3}$.
а) Существует ли число с эффективностью более 80%? Если да, найдите наименьшее такое число.
б) Существует ли число, эффективность которого максимальна (то есть не меньше, чем у любого другого числа)? Если да, найдите наименьшее такое число.

Решение. Перейдём к изучению **не**эффективности (1 минус эффективность). Из формулы для функции Эйлера следует, что она равна $\frac{p_1-1}{p_1}\cdot\ldots\frac{p_k-1}{p_k}$, где $p_1,\ldots,p_k$ — всевозможные различные простые делители n. Тогда, добавляя новый простой множитель, можно повысить эффективность, то есть в пункте (б) ответ «нет».

Наименьшее число с эффективностью больше 80% — это $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13=30030$. Его эффективность равна $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot=\frac{809}{1001}$. Докажем, что оно эффективнее, чем все меньшие его числа. Действительно, наличие простого множителя в степени выше первой не влияет на эффективность, значит, у искомого числа все множители в первой степени. Если множители не являются подряд идущими простыми числами, то при замене одного из простых чисел на меньшее эффективность увеличится. Значит, «рекорды эффективности» могут ставить только числа вида «произведение первых нескольких простых»; но эффективность числа $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ слишком мала.

Критерии. Пункт а) оценивается в 5 баллов, пункт б) — в 2 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2022–2023 учебный год. Отборочный этап

Задачи для 11 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Критерии для отдельных задач напечатаны серым.

---

1. Назовём натуральное число *полезным*, если оно не содержит в своей десятичной записи ни нулей, ни одинаковых цифр, а произведение всех цифр кратно их сумме. Найдите два наибольших последовательных (то есть различающихся на 1) полезных числа.

Решение. Числа 9875213 и 9875214 полезны. Докажем, что бо́льших последовательных полезных чисел не существует. У последовательных чисел и суммы цифр последовательны (иначе имеем переход через разряд, то есть 0 на конце). Но тогда максимальные возможные суммы цифр — 35 и 36 (среди любых двух бо́льших сумм хотя бы одна имеет простой делитель, больший 9, или превосходит $1 + \ldots + 9 = 45$). Последовательные полезные числа не более чем семизначные, иначе суммы их цифр будут не меньше $1+\ldots+8 = 36$ у каждого. Последовательных полезных чисел вида $9876***$ не бывает, так как у таких чисел суммы цифр не меньше $9+8+7+6+1+2+3 = 36$. А последовательные полезные числа вида $9875***$ могут отличаться от найденных только перестановкой последних цифр (иначе суммы их цифр больше 36), так что найденные числа действительно наибольшие.

Критерии. За оценку даётся 5 баллов, за пример — 2 балла.

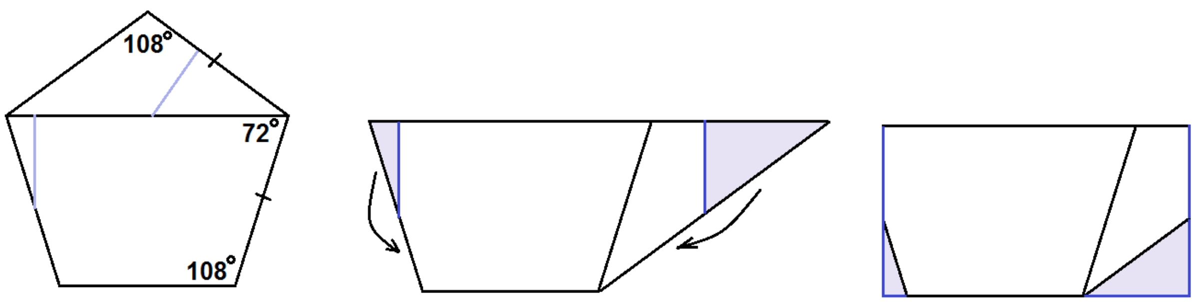
2. Четыре автомобиля A, B, C и D стартуют одновременно из одной и той же точки круговой трассы. A и B едут по часовой стрелке, а C и D — против. Все автомобили движутся с постоянными (но попарно различными) скоростями. Спустя ровно 7 минут после начала гонки A впервые встречает C, и в этот же момент B впервые встречает D. Через ещё 46 минут A и B встречаются впервые. А через какое время после начала гонки все машины встретятся в первый раз?

Решение. A и C встречаются раз в 7 минут, а A и B — раз в 53 минуты. Значит, все вместе они встретятся в такое время, которое кратно и 7, и 53, то есть через $7 \cdot 53 = 371$ минут. При этом B и D тоже встречаются каждые 7 минут, поэтому на 371-й минуте машина D будет в той же точке, что и остальные три машины.

Критерии. Вместо 53 минут использованы 46 — не более 3 баллов. Если в решении используется, что какие-либо из скоростей равны — 1 балл. Только ответ без объяснения — 0 баллов.

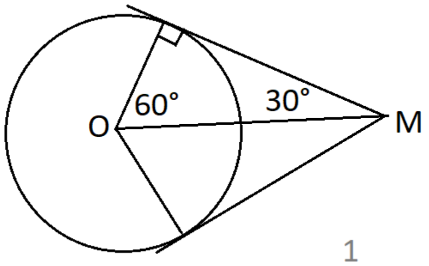
3. Докажите, что можно разрезать правильный пятиугольник на 4 части, из которых без просветов и наложений составляется прямоугольник.

Решение. Отрезав и переложив треугольник, можно получить трапецию (это следует из отмеченных углов и равенства сторон). Далее, отрезав от трапеции два прямоугольных треугольника, повернём их и получим прямоугольник (см. рисунок).

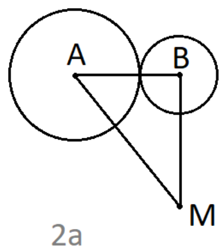


4. Будем называть точку *удобной* для окружности, если угол между касательными, проведёнными из этой точки к окружности, равен 60°. Две окружности с центрами A и B касаются друг друга, а точка M является удобной для каждой из них. Найдите отношение радиусов окружностей, если $\triangle ABM$ прямоугольный.

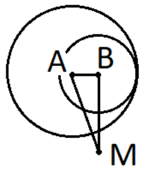
Решение. Заметим (см. рис. 1), что точка M удобна для окружности с центром O тогда и только тогда, когда OM вдвое больше радиуса.



1



2a



2b

Не умаляя общности, пусть окружности имеют радиусы $r_A \geqslant r_B$. Так как они касаются, то $AB = r_A \pm r_B$ (плюс при внешнем касании и минус при внутреннем, см. рис. 2). С другой стороны, $AM = 2r_A$ и $BM = 2r_B$, потому что M удобная для обеих окружностей. В треугольнике AMB сторона AM является гипотенузой, так как $2r_A \geqslant 2r_B$ и $2r_A \geqslant r_A \pm r_B$. Получаем уравнение

$$4r_A^2 = 4r_B^2 + r_A^2 \pm 2r_Ar_B + r_B^2,$$

то есть $3r_A^2 = 5r_B^2 \pm 2r_Ar_B$. Если касание внутреннее, то $r_A = r_B$, но тогда $A = B$ и AMB не будет треугольником. Если же касание внешнее, то $r_A = \frac{5}{3}r_B$. Следовательно, отношение радиусов равно $3 : 5$.

Критерии. Если не учитывается, что окружности могут касаться внутренним образом, то снимается 2 балла.

5. Найдите все тройки вещественных чисел a, b, c, для которых

$$27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1} = 3.$$

Решение. По неравенству о средних,

$$\frac{27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1}}{3} \geqslant \left(27^{a^2+b+c+1} \cdot 27^{b^2+c+a+1} \cdot 27^{c^2+a+b+1}\right)^{1/3} =$$

$$= 3^{a^2+b+c+1+b^2+a+c+1+c^2+a+b+1} = 3^{(a+1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2} \geqslant 1,$$

причём равенство достигается только при $a = b = c = -1$.

6. Парк представляет собой квадрат 10×10 клеток. В любую клетку можно поставить фонарь (но не более одного фонаря в каждой клетке).
а) Парк называется *освещённым*, если, в какой бы клетке ни находился посетитель, найдётся квадрат из 9 клеток, содержащий и посетителя, и какой-нибудь фонарь. Каково минимальное количество фонарей в освещённом парке?
б) Парк называется *надёжно освещённым*, если он остаётся освещённым даже после поломки одного любого фонаря. Каково минимальное количество фонарей в надёжно освещённом парке?

Решение. а) 4. Разобьём парк на 4 четверти (квадрата 5×5), тогда в каждой четверти должен быть хотя бы один фонарь (для освещения, например, угловых клеток). Ставя по фонарю в центре каждой четверти, получаем пример.

б) 10.

Оценка. В каждом угловом квадрате 3×3 должно быть хотя бы два фонаря (для освещения угловой клетки). Временно оставим только эти 8 фонарей. Каждый из них освещает только в пределах своей четверти, причём если сломается фонарь в центре четверти (или если он там отсутствует), то какая-то пятиклеточная полоска внутри этой четверти, граничащая с другой четвертью, точно не будет освещена. Заметим, что объединение двух таких полосок для противоположных четвертей в любом случае нельзя осветить одним фонарём, поэтому понадобятся ещё хотя бы два фонаря.

Пример:

		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		
		*					*		

Критерии. В пункте а) за оценку и пример даётся по 1 баллу. В пункте б) за оценку даётся 3 балла (из них 1 балл, если доказано, что 8 фонарей недостаточно), а за пример — 2 балла.

7. Назовём *эффективностью* натурального числа n долю всех натуральных чисел от 1 до n включительно, имеющих с n общий делитель, больший 1. Например, эффективность числа 6 равна $\frac{2}{3}$.
а) Существует ли число с эффективностью более 80%? Если да, найдите наименьшее такое число.
б) Существует ли число, эффективность которого максимальна (то есть не меньше, чем у любого другого числа)? Если да, найдите наименьшее такое число.

Решение. Перейдём к изучению **не**эффективности (1 минус эффективность). Из формулы для функции Эйлера следует, что она равна $\frac{p_1-1}{p_1} \cdot \ldots \frac{p_k-1}{p_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ — всевозможные различные простые делители n. Тогда, добавляя новый простой множитель, можно повысить эффективность, то есть в пункте (б) ответ «нет».

Наименьшее число с эффективностью больше 80% — это $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$. Его эффективность равна $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot = \frac{809}{1001}$. Докажем, что оно эффективнее, чем все меньшие его числа. Действительно, наличие простого множителя в степени выше первой не влияет на эффективность, значит, у искомого числа все множители в первой степени. Если множители не являются подряд идущими простыми числами, то при замене одного из простых чисел на меньшее эффективность увеличится. Значит, «рекорды эффективности» могут ставить только числа вида «произведение первых нескольких простых»; но эффективность числа $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ слишком мала.

Критерии. Пункт а) оценивается в 5 баллов, пункт б) — в 2 балла.

8. Некая непрерывная функция f такова, что $f(f(f(f(f(0))))) = 0$. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Докажем, что $f(x) = x$ имеет решение. Действительно, если это не так, то (в силу непрерывности функции $f(x) - x$) $f(x)$ либо всегда больше, либо всегда меньше, чем x, то есть при применении f результат всё время меняется в одну и ту же сторону. Но тогда условие задачи не может быть верным. Итак, существует такое x_0, что $f(x_0) = x_0$. Но тогда и $f(f(x_0)) = x_0$.